



Universidad Simón Bolívar
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas

Matemáticas III (MA-1116)
2^{do} Examen Parcial (35 %)
Abr-Jul 2012
Tipo A

JUSTIFIQUE TODAS SUS RESPUESTAS

- (9 pts.) Sean π_1 el plano que contiene a los puntos $A(2, -1, 2)$, $B(0, -1, 1)$ y $C(1, -2, -2)$, y π_2 el plano con ecuación $x - 7y - 2z = 9$.
 - Halle la ecuación del plano π_1 .
 - Diga si π_1 y π_2 son paralelos.
 - Halle la intersección de π_1 y el plano π_2 .

- (9 pts.) En el espacio vectorial P_3 se considera el subconjunto B :

$$B = \{-1 + 2x + 3x^2 + (\alpha - 1)x^3, -2 + (\alpha - 2)x^2, 1 + (\alpha - 3)x, \alpha - 4\}$$

Determine los valores de α para los cuales el subconjunto B es linealmente dependiente.

- (9 pts.) Sea H el subconjunto de \mathbb{R}^4 dado por

$$H = \{(x, y, z, t) \mid x - y + z + t = 0, 2x + z + t = 0\}$$

- Muestre que H es un subespacio vectorial.
 - Halle una base y la dimensión de H .
- (8 pts.) Determine si los siguientes subconjuntos del espacio vectorial P_2 son o no subespacios vectoriales:
 - $H_1 = \{p \in P_2 \mid p(0) - p(1) = 1\}$
 - $H_2 = \{p \in P_2 \mid \int_0^1 p(x) dx = 0\}$

Pregunta (1)

Sea los puntos $\vec{A} := \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $B := \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\vec{C} := \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$

Buscamos el plano que contiene los 3 puntos. Realizamos dos vectores

$$l_1 := B - A \rightarrow \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad l_2 := C - A \rightarrow \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Y luego buscamos la normal a estos dos vectores, que corresponde a la normal del plano.

$$n := l_1 \times l_2 \rightarrow \begin{pmatrix} -1 \\ -7 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{Con un punto y la normal podemos generar la ecuacion del plano}$$

$$n \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} - A \rightarrow 2 \cdot \bar{z} - 7 \cdot \bar{y} - \bar{x} - 9 \quad \text{Ecuacion Del Plano}$$

Para decir si dos planos son paralelos podemos realizar el producto cruz.

$$n_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ -7 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{plano dado por el problema} \quad \text{luego}$$

$$n \times n_1 \rightarrow \begin{pmatrix} 28 \\ 0 \\ 14 \end{pmatrix} \quad \text{distinto de CERO} \\ \text{NO SON PARALELOS}$$

Para buscar la interseccion, buscamos el conjunto solucion.

$$\begin{aligned} x - 7y - 2z &= 9 \\ 2z - 7y - x &= 9 \end{aligned} \quad y_1 := \frac{-9}{7} \quad x_1 := 2 \cdot t \quad z_1 := t$$

Luego la ecuacion de la recta interseccion de los planos

$$\frac{x_1}{2} = z_1 \quad y_1 = \frac{-9}{7}$$

Ecuacion Recta

Pregunta (2)

De la definicion de dependencia e independencia lineal se tiene

$$\alpha \cdot [-1 + 2x + 3x^2 + (a-1)x^3] + \beta \cdot [-2 + (a-2)x^2] + \gamma \cdot [1 + (a-3)x] + \lambda \cdot (a-4) = 0 + 0x + 0x^2 + 0x^3$$

Agrupamos las 1, x, x^2 x^3

$$[-\alpha - 2\beta + \gamma + (a-4)\lambda] + x \cdot [2\alpha + (a-3)\gamma] + x^2 [3\alpha + (a-2)\beta] + x^3 [(a-1)\alpha] = 0 + 0x + 0x^2 + 0x^3$$

Se genera un sistema de ecuaciones, para que se cumpla la igualdad

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 & a-4 & 0 \\ 2 & 0 & a-3 & 0 & 0 \\ 3 & a-2 & 0 & 0 & 0 \\ a-1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ de manera que si el determinante de la matriz es igual a } \\ \text{cero, el sistema tendra infinitas soluciones Por que?. y los} \\ \text{vectores seran LD}$$

$$\left(\begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 & a-4 \\ 2 & 0 & a-3 & 0 \\ 3 & a-2 & 0 & 0 \\ a-1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right) \text{ simplify } \rightarrow (a-1) \cdot (a-2) \cdot (a-3) \cdot (a-4)$$

Se dio cuenta que es triangular superior. Luego el determinante solo sera la multiplicacion de la diagonal principal

$$a_1 := 1 \quad a_2 := 2 \quad a_3 := 3 \quad a_4 := 4 \quad \text{el subconjunto B es LD}$$

Pregunta (3)

El espacio vectorial es \mathbb{R}^4 con dos condiciones a cumplir.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \text{ tal que } \begin{aligned} y_2 &= x_2 + z_2 + t_2 \\ z_2 &= -t_2 - 2x_2 \end{aligned} \text{ implica } y_2 = -x_2$$

si sustituimos estas condiciones en el elemento del espacio vectorial

$$u := \begin{pmatrix} x \\ -x \\ -t - 2x \\ t \end{pmatrix} \quad \text{luego sea} \quad F := \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{pertenece a H} \\ \text{luego H es NO vacio} \end{array}$$

$$\text{Sea} \quad u_1 := \begin{pmatrix} x_4 \\ y_4 \\ z_4 \\ t_4 \end{pmatrix} \quad u_2 := \begin{pmatrix} x_5 \\ y_5 \\ z_5 \\ t_5 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

$$u_1 + u_2 \rightarrow \begin{pmatrix} x_4 + x_5 \\ y_4 + y_5 \\ z_4 + z_5 \\ t_4 + t_5 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{verificamos} \\ y_4 + y_5 = -x_4 - x_5 = -(x_4 + x_5) \\ z_4 + z_5 = -t_4 - 2x_4 - t_5 - 2x_5 = -(t_4 + t_5) - 2(x_4 + x_5) \end{array}$$

entonces $u_1 + u_2 \in H$

$$\alpha \cdot u_1 \rightarrow \begin{pmatrix} \alpha \cdot x_4 \\ \alpha \cdot y_4 \\ \alpha \cdot z_4 \\ \alpha \cdot t_4 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{verificamos} \\ \alpha y_4 = \alpha \cdot (-x_4) = -(\alpha x_4) \\ \alpha \cdot z_4 = \alpha \cdot (-t_4 - 2x_4) = -(\alpha \cdot t_4) - 2(\alpha \cdot x_4) \end{array}$$

luego $\alpha \cdot u_1 \in H$

Se demuestra que H es un subespacio.

Para hallar la base sabemos que:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -x \\ -t - 2x \\ t \end{pmatrix} = x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{luego} \quad H = \text{gen} \left[\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$$

Se demuestra que son LI por lo que

$$\text{Base}_H := \left(\begin{array}{c} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 0 \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{array} \right) \quad \dim(H) := 2$$

Pregunta (4)

a.- Contra ejemplo $p_1(x) := -x$ $p_1(0) - p_1(1) \rightarrow 1$ pertenece

$$p_2(x) := -x^2 \quad p_2(0) - p_2(1) \rightarrow 1 \quad \text{pertenece}$$

$g(x) := p_1(x) + p_2(x)$ $g(0) - g(1) \rightarrow 2$ NO PERTENECE luego la suma no se cumple.

NO ES SUBESPACIO.

b.- Sea $p_3(x) := x - \frac{1}{2}$ $\int_0^1 p_3(x) dx \rightarrow 0$ PERTENECE

luego H_2 es NO VACIO.

Sea $f(x), g(x) \in H_2$ y $\alpha \in \mathbb{R}$

$f(x) + g(x)$ comprobamos

$$\int_0^1 f(x) + g(x) dx = \int_0^1 f(x) dx + \int_0^1 g(x) dx = 0 + 0 = 0 \quad \text{PERTENECE}$$

$\alpha \cdot f(x)$ comprobamos

$$\int_0^1 \alpha \cdot f(x) dx = \alpha \cdot \int_0^1 f(x) dx = \alpha \cdot 0 = 0 \quad \text{PERTENECE} \quad \text{Luego se concluye que } H_2 \text{ es SUBESPACIO.}$$